Über unendlich viele Kurven derselben Gattung oder eine Methode Gleichungen für unendlich viele Kurven derselben Art zu finden*

Leonhard Euler

§1 Ich bezeichne hier solche Kurven als solche von derselben Gattung, welche sich voneinander lediglich in der Art um eine Konstante unterscheiden, welche, die einen und die anderen Werte annehmend, die Kurven bestimmt. Diese Konstante ist vom hoch geehrten Herrn Hermann Modulus genannt worden, von anderen hingegen Parameter: Weil aber die Bezeichnung Parameter Verwirrung stiften kann, werde ich das Wort Modulus beibehalten. Es ist also der Modulus eine konstante und unveränderliche Linie, während eine einzige beliebige der unendlich vielen Kurven bestimmt wird; er hat aber verschiedene Werte und ist daher veränderlich, wenn er auf verschiedene Kurven bezogen wird. Wenn also in der Gleichung $y^2 = ax$ a für den Modulus genommen wird, entspringen aus der Veränderlichkeit von a unzählige über derselben Achse konstruierte Parabeln mit denselben Scheiteln.

§2 Es werden also unendlich viele Kurven derselben Gattung alle mit einer einzigen Gleichungen ausgedrückt, in welche der Modulus, welcher für uns immer mit dem Buchstaben a angezeigt werden wird, eingeht. Wenn diesem

*Originaltitel: "De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis", zuerst publiziert in: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band* 7 (1740, geschrieben 1734): pp. 174 – 189, (180-183) Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 22, pp. 36 – 56, Eneström Nummer E44, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Modulus nämlich nacheinander die einen und die anderen Werte zugeteilt werden, wird die Gleichung immer andere Kurven geben, welche alle in einer einzigen Gleichung enthalten sind. Diese den Modulus beinhaltende Gleichung werden wir mit Herrn HERMANN die modulare Gleichung nennen; in dieser sind außer anderen Konstanten und Größen desselben Wertes in allen Kurven der Modulus a und zwei sich auf eine beliebige Kurve beziehende Variablen enthalten, von welcher Art die Abszisse und die Ordinate, oder die Abszisse und der Kurvenbogen oder die Fläche und die Abszisse etc., je nach dem was das zu lösende Problem erfordert.

§3 Es seien also die Größen die Variablen x und z, die mit dem Modulus a in die modulare Gleichung eingehen. Es ist ersichtlich, wenn eine algebraische Gleichung zwischen x und z und a gegeben ist, dass für eine einzige Kurve, in welcher man a wie eine Konstante betrachtet, dieselbe zugleich eine modulare sein wird, oder sich auf alle Kurven bezieht, wenn a nur variabel wird. Aber wenn zwischen x und z keine algebraische Gleichung gegeben ist, wird es schwierig sein, die modulare Gleichung zu finden. Denn es sei $z = \int Pdx$, wo P in a, z und x auf irgendeine Weise gegeben ist, oder es sei $dz = Pdx$, in welcher Gleichung a wie eine Konstante betrachtet wird; man sieht also ein, dass man eine modulare Gleichung hat, wenn das Integral der Gleichung $dz = Pdx$ erneut differenziert wird, nachdem auch a als Variable festgelegt worden ist. Aber weil sich die Integration nicht durchführen lässt, wird eine Methode solcher Art verlangt, mit welcher die Differentialgleichung, welche hervorginge, wenn das Integral erneut nach a als Variable differenziert wird, gefunden werden kann.

§4 Um Kurven zu Konstruieren und zu Kenntnis derer zu erlangen, genügt die Gleichung $dz = Pdx$. Denn nachdem dem Modulus a ein gewisser Wert gegeben worden ist, konstruiere man die Gleichung $dz = Pdx$, wonach man eine der unendlich vielen Kurven haben wird, und indem man in gleicher Weise die einen und die anderen Werte für a einsetzt, wird man andere Kurven finden. Aber wenn auf diesen Kurven je nach Anforderungen des Problems gewisse Punkte angegeben werden müssen, genügt eine solche Gleichung $z = \int Pdx$ nicht, sondern es wird eine vom Integralzeichen befreite Gleichung verlangt, in welcher, sofern sie nicht algebraisch ist, auch die Differentiale von a enthalten sind. Aus der gegebenen Differentialgleichung muss für die eine Kurve $dz = Pdx$, in welcher a wie eine Konstante betrachtet wird, eine

Differentialgleichung gefunden werden, in welcher auch a variabel ist, und dies wird die modulare Gleichung sein. Diese modulare Gleichung wird einmal eine Differentialgleichung ersten Grades sein, ein anderes Mal eine vom zweiten und höheren Grad, und manchmal wird sie auch gar nicht gefunden werden können.

§5 Um also eine Methode anzugeben, mit welcher aus der Differentialgleichung $dz = Pdx$, in welcher a konstant ist, eine modulare Gleichung gefunden werden kann, welche a als eine Variable beinhaltet; ich lege zuerst fest, dass P eine Funktion nur von a und x ist, dass $\int Pdx$ zumindest durch Quadraturen dargeboten werden kann. Es wird also $z = \int Pdx$ sein, in welcher Integration von Pdx a als Konstante behandelt worden ist. Man sucht nun das Differential von $\int Pdx$, wenn auch a wie eine Variable behandelt wird; nachdem dieses gefunden worden ist und dem Differential von dz gleich gesetzt worden ist, wird man die modulare Gleichung haben. Aber das Differential von $\int Pdx$ wird diese Form haben

$$Pdx + Qda,$$

und

$$dz = Pdx + Qda$$

wird eine modulare Gleichung sein, wenn nur der Wert von Q bekannt wäre.

§6 Um aber den Wert von Q zu finden, dient das folgende Theorem.

Wenn die Größe A, aus den zwei Variablen t und u irgendwie zusammengesetzt, für konstant gehaltenes t differenziert wird und dieses Differential erneut für konstant gehaltenes u nach der Variable t differenziert wird, resultiert dasselbe Differentiale wie wenn in umgekehrter Reihenfolge A zuerst für konstant gehaltenes u differenziert wird und dieses Differential erneut für konstant gehaltenes t nach der Variable u differenziert wird.

Es sei eines Beispiels wegen

$$A = \sqrt{t^2 + nu^2},$$

man differenziere für konstant gehaltenes t, man wird

$$\frac{nudu}{\sqrt{t^2 + nu^2}}$$

haben. Dieses differenziere man erneut für konstant gehaltenes u und es wird

$$\frac{-ntudtdu}{(t^2 + nu^2)^{\frac{3}{2}}}$$

hervorgehen. Nun differenziere man in umgekehrter Reihenfolge $\sqrt{t^2 + nu^2}$ für konstant gehaltenes u, und das Differential wird

$$\frac{tdt}{\sqrt{t^2 + nu^2}}$$

sein, welches erneut für konstant gehaltenes t differenziert

$$\frac{-ntudtdu}{(t^2 + nu^2)^{\frac{3}{2}}}$$

geben wird, was mit dem zuerst gefundenen übereinstimmt. Und dieselbe Übereinstimmung wird in allen anderen Beispielen entdeckt werden.

§7 Obwohl die Anwender die Gültigkeit dieses Theorems leicht erkennen, möchte ich dennoch einen aus der Natur der Differentiale abgeleiteten Beweis hinzufügen. Weil A eine Funktion von t und u ist, gehe A in B über, wenn $t + dt$ anstelle von t gesetzt wird; aber nachdem $u + du$ anstelle von u gesetzt worden ist, gehe A in C über. Nachdem aber zugleich $t + dt$ anstelle von t und $u + du$ anstelle von u gesetzt worden ist, werde A in D umgewandelt. Daraus ist es ersichtlich, wenn in B $u + du$ anstelle von u geschrieben wird, dass D hervorgeht; und in gleicher Weise, wenn in C $t + du$ anstelle t gesetzt wird, dass auch D hervorgehen wird. Nachdem dies vorausgeschickt worden ist, werde A für konstant gehaltenes t differenziert, es wird $C - A$ hervorgehen, denn für $u + du$ anstelle von u gesetzt geht A in C über, das Differential ist aber $C - A$. Wenn weiter in $C - A$ $t + dt$ anstelle von t gesetzt wird, wird $D - B$ hervorgehen, woher das Differential

$$D - B - C + A$$

sein wird. Nachdem nun in umgekehrter Reihenfolge $t + dt$ anstelle von t in A gesetzt worden ist, wird man B haben, und das Differential von A für allein variables t wird $B - A$ sein. Dieses Differential geht nach Setzen von $u + du$ anstelle von u in $D - C$ über, woher sein Differential

$$D - B - C + A$$

sein wird, was mit dem durch die erste Operation gefundenen Differential übereinstimmt. Q.E.D.

§8 Dieses Theorem dient aber auf dieses Weise zum Finden des Wertes von Q. Weil P und Q Funktionen von a und x sind, sei

$$dP = Adx + Bda \quad \text{und} \quad dQ = Cdx + Dda,$$

und weil $z = \int Pdx$ ist, wird es auch eine Funktion von a und x sein, es ist aber

$$dz = Pdx + Qda$$

gesetzt worden. Gemäß des Theorems differenziere man z für konstant gehaltenes x und das Differential wird Qda sein, dieses wird weiter für konstant gehaltenes a $Cdadx$ geben. Bei der anderen Operation ist das Differential von z für zuerst konstant gehaltenes a Pdx, das Differential von diesem ist aber für konstant gehaltenes x $Bdadx$. Weil vermöge dieses Theorems $Cdadx$ und $Bdadx$ gleich sein müssen, wird daraus $C = B$. Es ist aber B aus P gegeben; denn das Differential von P für konstant gehaltenes x gibt geteilt durch da B. Weil also

$$dQ = Bdx + Dda$$

ist, wird $Q = \int Bdx$ sein, wenn in dieser Integration a wie eine Konstante betrachtet wird.

§9 Aus diesen Erläuterungen wird man also

$$dz = Pdx + da \int Bdx$$

haben, wobei

$$dP = Adx + Bda.$$

Wenn also Bdx integriert werden kann, wird man die gewünschte modulare Gleichung haben. Aber wenn sie nicht integriert werden kann, ist diese Gleichung gleichermaßen unnütz wie die erste $z = \int Pdx$, denn jede der beiden Differentialgleichungen beinhaltet eine Integration, in welcher a wie eine Konstante behandelt werden muss, was natürlich der Natur der modularen Gleichung widerspricht, in welcher natürlich a genauso wie x und z variabel sein muss.

§10 Wannimmer aber Bdx keine Integration zulässt, ist dennoch die gefundene Gleichung nicht als vollkommen nutzlos zu verwerfen. Denn wenn die Integration von Bdx von $\int Pdx$ abhängt, wird die modulare Gleichung dargeboten werden können. Wenn nämlich

$$\int Bdx = \alpha \int Pdx + K$$

war, wobei K eine algebraische Funktion von a und x ist, wird wegen $\int Pdx = z$

$$\int Bdx = \alpha z + K$$

und

$$dz = Pdx + \alpha zda + Kda$$

sein, welche Gleichung tatsächlich eine modulare sein wird. Sooft also Bdx entweder tatsächlich integriert werden kann oder zumindest zur Integration von Pdx geführt werden kann, wird man eine modulare Gleichung haben, welche eine Differentialgleichung ersten Grades sein wird. Aber wenn Pdx integrierbar ist, ist es nicht einmal notwendig, sondern $z = \int Pdx$ wird zugleich eine modulare Gleichung sein.

§11 Wenn aber $\int Bdx$ weder algebraisch noch auf $\int Pdx$ zurückgeführt werden kann, ist zu sehen, ob $\int Bdx$ auf die Integration eines anderen Differentials, in welcher a nicht enthalten ist, zurückgeführt werden kann. Denn ein solches Integral, in welchem a nicht enthalten ist, stört die modulare Gleichung nicht, weil sie, wenn es beliebt, durch Differentiation beseitigt werden kann. Und mit demselben Recht, wenn $\int Pdx$ auf ein anderes Integral zurückgeführt werden kann, welches a nicht enthält, bedarf es nicht einmal der Bestimmung von Q, sondern $z = \int Pdx$ gibt sofort eine modulare Gleichung, wie wenn

$$\int Pdx = h\int Kdx$$

ist, wobei h durch a und K nur durch x gegeben ist, wird die modulare Gleichung

$$z = h\int Kdx$$

oder

$$dz = \frac{zdh}{h} + Khdx$$

sein.

§12 Aber wenn all dies nicht der Fall ist, ist dies ein Anzeichen, dass eine modulare Gleichung nicht als Differentialgleichung ersten Grades gegeben ist. Deswegen wird in den höheren Graden von Differentialen gesucht werden müssen. Dafür differenziere ich erneut die Gleichung

$$dz = Pdx + da\int Bdx.$$

Ich setze aber

$$dB = Edx + Fda,$$

wonach das Differential von $\int Bdx$

$$Bdx + da\int Fdx$$

sei. Nach Durchführen der Differentiation und nachdem anstelle von $\int Vdx$ sein Wert aus derselben Gleichung nämlich $\frac{dz}{da} - \frac{Pdx}{da}$ gesetzt worden ist, wird man

$$ddz = Pddx + dPdx + \frac{dzdda}{da} - \frac{Pdxdda}{da} + Bdadx + da^2\int Fdx$$

haben. Es wird also

$$\int Fdx = \frac{ddz}{da^2} - \frac{dzdda}{da^3} - \frac{Pddx}{da^2} - \frac{dPdx}{da^2} + \frac{Pdxdda}{da^3} - \frac{Bdx}{da}$$

sein. Weil aber $\int Bdx = \frac{dz}{da} - \frac{Pdx}{da}$ und $\int Pdx = z$ ist, wenn $\int Fdx$ auf die Integrale Bdx und $\int Pdx$ zurückgeführt werden kann oder wenn sie tatsächlich integriert werden kann, wird man die modulare Gleichung haben, welche eine Differentialgleichung zweiten Grades ist. Wie wenn

$$\int Fdx = \alpha \int Bdx + \beta \int Pdx + K$$

war, wobei α und β auf beliebige Weise durch a und Konstanten, und K durch a und x und Konstanten gegeben ist, wird die modulare Gleichung

$$\frac{daddz - dzdda - Pdaddx + Pdxdda - dPdadx}{da^3} - \frac{Bdx}{da} =$$
$$\frac{\alpha dz - aPdx}{da} + \beta z + K$$

sein. Aber B und F werden aus dem gegebenen P leicht gefunden.

§13 Wenn $\int Fdx$, was aber sehr selten geschieht, entweder nicht weiter a in sich umfasst oder auf eine anderes Integral zurückgeführt werden kann, in welchem a nicht vorhanden ist, wird die gefundene Differentialgleichung zweiten Grades für die legitime modulare Gleichung gehalten werden können. Aber wenn all dies nicht gelingt, ist noch eine Differentiation durchzuführen, in welcher das Differential von Fdx

$$Fdx + da \int Hdx$$

sei, mit

$$dF = Gdx + Hda.$$

Danach ist zu sehen, ob entweder $\int Hdx$ selbst dargeboten werden kann oder von den vorherigen $\int Fdx$, $\int Bdx$ und $\int Pdx$ anhängt oder ob a aus dem Integralzeichnen herausgelöst werden kann. Wenn etwas davon eintritt, wird man eine modulare Gleichung als Differentialgleichung dritten Grades haben; wenn aber nichts davon Geltung hatte, ist in gleicher Weise durch Differentiation weiter fortzuschreiten, bis schließlich die Integralzeichen eliminiert werden können.

§14 Nachdem diese allgemeinen Erläuterungen vorausgeschickt worden sind, gehe ich zu Spezialfällen über, im Begriff Fälle zu entwickeln, in welchen die Funktion P auf beliebige Weise definiert wird. Es sei also P eine Funktion nur von x, a hingegen gar nicht beinhaltend, welche ich mit dem Buchstaben X bezeichnen werde, es wird also $dz = Xdx$ sein, weil welche Gleichung freilich a nicht enthält, scheint sie sich auf eine einzige Kurve zu beziehen, und nicht geeignet zu sein, eine modulare Gleichung zu liefern. Aber weil sich in der Integration eine Konstante addieren lässt, wird

$$z = \int Xdx + na$$

sein können, oder durch Differenzieren

$$dz = Xdx + nda,$$

welches eine tatsächliche modulare Gleichung ist. Dieselbe Gleichung wäre hervorgegangen, wenn ich gemäß der Regel X für konstant gehaltenes x differenziert hätte, woher $B = 0$ und $\int Bdx = n$ einer Konstante hervorgeht, es wäre die modulare Gleichung

$$dz = Xdx + nda$$

hervorgegangen, an deren Stelle man lieber das Integral

$$z = \int Xdx + na$$

verwende.

§15 Es sei nun $P = AX$, während A eine Funktion von a und X eine nur von x sei. Weil also $z = \int Pdx$ ist, wird $z = \int Axdx$ sein oder weil in der Integration a wie eine Konstante behandelt werden muss, $z = A \int Xdx$. Diese Gleichung oder ihr Differential

$$Adz - zdA = A^2 Xdx$$

wird die gesuchte modulare Gleichung sein. Weil anstelle von A, einer Funktion nur von a, auch der Modulus a selbst gesetzt werden kann, kann anstelle des Modulus irgendeine Funktion desselben mit derselben Berichtigung für die Modulus gehalten werden.

§16 Es sei $P = A + X$, während A und X dieselben Werte wie zuvor beibehalten. Es wird also

$$dz = Adx + Xdx$$

und $z = Ax + \int Xdx$ sein, welche Gleichung schon eine modulare ist, weil der Modulus A nicht hinter dem Integralzeichen involviert ist. Wenn $\int Xdx$ dies aber nicht zulässt, kann die Differentialgleichung

$$dz = Adx + xdA + Xdx$$

für die modulare Gleichung gehalten werden.

§17 In gleicher Weise lässt sich die modulare Gleichung finden, wenn

$$P = AX + BY + CZ + \text{etc.}$$

war, wo A, B, C etc. irgendwelche Funktionen des Modulus a und X, Y, Z etc. irgendwelche Funktionen von x und Konstanten, abgesehen von a, sind. Denn wegen

$$dz = AXdx + BYdx + CZdx + \text{etc.}$$

wird

$$z = A\int Xdx + B\int Ydx + C\int Zdx + \text{etc.}$$

sein, welche zugleich die modulare ist, weil der Modulus a nie hinter dem Integralzeichen gefunden wird.

§18 Es sei $P = (A + X)^n$ oder $z = \int dx(A + X)^n$. Das Differential von P für konstant gehaltenes x ist $n(A + X)^{n-1}dA$, was durch da geteilt den obigen Wert B (siehe § 8) gibt. Es wird also

$$dz = (A + X)^n dx + ndA\int (A + X)^{n-1}dx$$

oder

$$\int dx(A + X)^{n-1} = \frac{dz - (A + X)^n dx}{ndA}$$

sein. Weil also

$$\int dx(A+X)^n = z$$

ist, wird man, wenn diese zwei Integrale voneinander abhängen oder $\int dx(A+X)^{n-1}$ sogar algebraisch ausgedrückt werden kann, haben, was man sucht. Wenn keines von beiden sich zuträgt, ist eine weitere Differentiation durchzuführen. Aber das Differential von $\int dx(A+X)^{n-1}$ ist

$$dx(A+X)^{n-1} + (n-1)dA \int (A+X)^{n-2}dx = \text{Diff.}\frac{dz-(A+X)^n dx}{ndA}.$$

Es wird deshalb

$$\int dx(A+X)^{n-2} = \frac{1}{(n-1)dA}\text{Diff.}\frac{dz-(A+X)^n dx}{ndA} - \frac{dx(A+X)^{n-1}}{(n-1)dA}$$

sein. Daher ist zu sehen, ob $\int dx(A+X)^{n-2}$ entweder integriert oder auf die ersten Integrale zurückgeführt werden kann.

§19 Wenn n eine ganze positive Zahl war, wird die modulare Gleichung algebraisch sein. Denn $(A+X)^n$ kann in endlich vielen Termen aufgelöst werden, von welchen jeder mit dx multipliziert integriert werden kann, sodass der Modulus a nicht in das Integralzeichen eingeht. Die modulare Gleichung wird aber diese sein

$$z = A^n x + \frac{n}{1}A^{n-1}\int Xdx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A^{n-2}\int X^2 dx + \text{etc.}$$

Es beliebt also übrig zu untersuchen, in welchen Fällen, wenn n keine ganze positive Zahl war, die obigen erwähnten Bedingungen auftreten.

§20 Es sei zuerst $X = bx^m$, wo b auch von a abhängen kann; es wird also $z = \int (A+bx^m)^n dx$ sein. Diese Formel ist zuerst integrierbar, wenn $m = \frac{1}{i}$, während i irgendeine ganze positive Zahl bezeichnet; weiter auch, wenn $m = \frac{-1}{n+i}$ ist. In diesen Fällen wird also die modulare Gleichung algebraisch. Aber wenn $m = -\frac{1}{n}$ ist, wo b nicht von a abhängen kann, lässt jene Gleichung freilich keine Integration zu, jedoch wird die folgende

$$dz = \left(A + bx^{\frac{-1}{n}}\right)^n dx + ndA \int dx \left(A + bx^{\frac{-1}{n}}\right)^{n-1}$$

integrierbar und die modulare Gleichung wird eine Differentialgleichung ersten Grades sein.

§21 Aber man kann nicht nur, welche Zahlen auch immer m zugeteilt werden, eine modulare Gleichung für eine Differentialgleichung ersten Grades halten, sondern auch, wenn

$$z = \int x^m dx(A + bx^k)^n$$

war. Denn es wird

$$dz = x^m dx(A + bx^k)^n + ndA \int x^m dx(A + bx^k)^{n-1}$$

werden. Aber es ist

$$\int x^m dx(A + bx^k)^n = \frac{x^{m+1}(A + bx^k)^n}{m + nk + 1} + \frac{nkA}{m + nk + 1} \int x^m dx(A + bx^k)^{n-1}$$

oder

$$\int x^m dx(A + bx^k)^{n-1} = \frac{(m + nk + 1)z}{nkA} - \frac{x^{m+1}(A + bx^k)^n}{nkA}.$$

Als logische Konsequenz wird man diese modulare Gleichung haben

$$Akdz = (A + bx^k)^n (Akx^m dx - x^{m+1} dA) + (m + nk + 1)zdA.$$

In gleicher Weise wäre die modulare Gleichung gefunden worden, wenn

$$z = B \int x^m dx(A + bx^k)^n$$

war, denn es wäre kein Unterschied hervorgegangen, außer dass man anstelle von z $\frac{z}{B}$ hätte schreiben müssen und $\frac{Bdz - zdB}{B^2}$ anstelle von dz, wenn freilich B von a abhängt.

§22 Nachdem aber die Bestimmungen eines Buchstabens P von dieser Art abgehandelt worden sind, welche sich wenig weit erstrecken, gehe ich zu anderen über, welche um vieles öfter gebraucht werden können. Dies Bestimmungen sind also in dieser Eigenschaft einer gewissen Funktion enthalten, in welcher jede Funktion überall dieselbe Anzahl an Dimensionen der variablen Größen hat. Denn solche Funktion lassen die Differentiation auf eine eigene Weise zu. Eines Beispiels wegen sei u etwa eine Funktion von keiner Dimension von a und x, von welcher Art $\frac{a}{x}$, $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ und ähnliche andere sind, in welchen die Anzahl der Dimensionen von a und x im Nenner gleich der Anzahl der Dimension des Zählers ist. Es sei aber eine solche Funktion u differenziert als $Rdx + Sda$ gegeben; ich sage, dass

$$Rx + Sa = 0$$

sein wird. Denn wenn in der Funktion u $x = ay$ gesetzt wird, heben sich alle a gegenseitig auf und in ihr wird außer y und Konstanten kein anderer Buchstabe zurückbleiben. Deswegen wird man im Differential nach dieser Substitution ein nach dieser Substitution kein anderes Differential finden als dy. Weil aber $x = ay$ ist, wird $dx = ady + yda$ sein, und daher

$$du = Rady + Ryda + Sda.$$

Es wird also

$$Ry + S = 0 \quad \text{oder} \quad Rx + Sa = 0$$

sein müssen.

§23 Wenn aber u eine Funktion von m Dimensionen von a und x war, und

$$du = Rdx + Sda,$$

wird $\frac{u}{x^m}$ eine Funktion von a und x von keiner Dimension sein. Man differenziere also $\frac{u}{x^m}$ und es wird

$$\frac{xdu - mudx}{x^{m+1}} \quad \text{oder} \quad \frac{Rxdx - mudx + Sxda}{x^{m+1}}$$

hervorgehen. Weil dieses ein Differential von keiner Dimension ist, wird

$$Rx^2 - mux + Sax = 0$$

oder

$$Rx + Sa = mu$$

sein. Wenn also u eine Funktion von m Dimensionen von a und x war, und man

$$du = Rdx + Sda$$

gesetzt wird, wird

$$Rx + Sa = mu$$

sein und daher

$$du = Rdx + \frac{da}{a}(mu - Rx)$$

oder

$$adu = Radx - Rxda + muda.$$

§24 Nachdem all dies vorausgeschickt worden ist, sei in $dz = Pdx$ oder $z = \int Pdx$ P eine Funktion von n Dimensionen von a und x, also wird z eine Funktion von $n+1$ Dimensionen sein. Wenn also $dz = Pdx + Qda$ gesetzt wird, wird

$$Px + Qa = (n+1)z$$

sein. Daher wird der Wert von Q eingesetzt die modulare Gleichung

$$dz = Pdx + \frac{da}{a}((n+1)z - Px)$$

oder

$$adz - (n+1)zda = Padx - Pxda$$

geben. Diese ist eine Differentialgleichung von nur erstem Grad. Weil aber allgemein $Q = \int Bdx$ ist, wird in diesem Fall

$$(n+1)\int Pdx = a\int Bdx + Px$$

sein. Daher erkannt man, dass in diesem Fall das Integral $\int Bdx$ immer auf $\int Pdx$ zurückgeführt wird.

§25 Es wird dieselbe modulare Gleichung aus der Betrachtung von P allein hervorgehen. Denn für $dP = Adx + Bda$ gesetzt wird

$$nP = Ax + Ba$$

sein. Weil aber

$$dz = Pdx + da\int Bdx$$

ist, wird

$$dz = Pdx + \frac{da}{a}\int (nPdx - Axdx)$$

sein, in welcher Integration a als Konstante behandelt wird. Es wird also $\int nPdx = nz$ sein, und

$$\int Axdx = Px - \int Pdx$$

wegen $\int Adx = P$. Man wird deshalb

$$dz = Pdx + \frac{da}{a}((n+1)z - Px)$$

haben, was vollkommen mit dem vorhergehenden übereinstimmt.

§26 Während P seinen Wert von n Dimensionen beibehält, sei $z = \int APXdx$, wo A eine Funktion von a und X eine nur von x sei. Es wird also $\frac{z}{A} = \int PXdx$ sein. Nach Setzen von

$$dP = Adx + Bda$$

(in welcher der Buchstabe A mit dem anderen, welcher eine Funktion nur von a ist, nicht zu verwechseln ist) wird

$$nP = Ax + Ba$$

sein. Das Differential von PX wird also für konstant gehaltenes x $BXda$ sein. Als logische Konsequenz wird man

$$d\cdot\frac{z}{A}=PXdx+da\int BXdx=PXdx+\frac{da}{a}\int(nPXdx-AXxdx)$$

haben. Es ist aber

$$\int nPXdx=\frac{nz}{A}\quad\text{und}\quad\int AXxdx=PXx-\int PXdx-\int PxdX.$$

Daher wird

$$d\cdot\frac{z}{A}=PXdx-\frac{PXxda}{a}+\frac{(n+1)zda}{Aa}+\frac{da}{a}\int PxdX$$

werden. Wenn also $\int PxdX$ nicht auf $\int PXdx$ zurückgeführt oder gar nicht integriert werden kann, kann eine modulare Gleichung nicht als Differentialgleichung ersten Grades gegeben sein.

§27 Aber wenn $z=R\int Pdx$ war, während R eine beliebige algebraische Funktion aus a, x und sogar aus z ist, aber P eine Funktion von a und x von n Dimensionen, weil $\frac{z}{R}=\int Pdx$ ist, wird

$$d\cdot\frac{z}{R}=Pdx+\frac{da}{a}\left(\frac{(n+1)z}{R}-Px\right)=\frac{Rdz-zdR}{R^2}$$

oder

$$Radz-zadR-(n+1)Rzda=PR^2adx-PR^2xda$$

sein. Allgemein bemerke man aber, sooft $z=\int Pdx$ auf eine modulare Gleichung zurückgeführt werden kann, dass ebenso oft auch $z=R\int Pdx$ auf eine modulare Gleichung zurückgeführt werden kann. Denn es besteht kein anderer Unterschied als dass das, was in jenem Fall z war, in diesem Fall $\frac{z}{R}$ sein muss. Wenn also R entweder eine algebraische Größe war oder eine solche transzendente, dass ihr Differential für auch variabel festgelegtes a ohne Integration dargeboten werden kann, wird eine modulare Gleichung durch die gegebenen Vorschriften gefunden werden. Deswegen werden sich im Folgenden solche Fälle, auch wenn sie sich weiter erstrecken, übergehen lassen.

§28 Wir wollen festlegen, dass

$$z = \int (P+Q)dx \quad \text{oder} \quad z = \int Pdx + \int Qdx$$

und P eine Funktion von a und x von $n-1$ Dimensionen, Q hingegen eine Funktion derselben a und x von $m-1$ Dimensionen ist. Weil also das Differential von $\int Pdx$

$$\frac{P(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a}\int nPdx$$

und das Differential von $\int Qdx$

$$\frac{Q(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a}\int mQdx$$

ist, wird

$$dz = \frac{(P+Q)(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a}(n\int Pdx + m\int Qdx)$$

sein. Man setze

$$\frac{adz - (P+Q)(adx - xda)}{da} = u,$$

und es wird

$$u = \int Pdx + m\int Qdx$$

sein. Wenn also weiter differenziert wird, wird

$$du = \frac{(nP+mQ)(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a}(n^2\int Pdx + m^2\int Qdx)$$

sein. Für

$$\frac{adu - (nP+mQ)(adx - xda)}{da} = t$$

gesetzt wird

$$t = n^2\int Pdx + m^2\int Qdx$$

sein. Nachdem nun aus diesen drei Gleichungen von z, u und t die Integrale $\int Pdx$ und $\int Qdx$ eliminiert worden sind, wird diese Gleichung

$$mnz - (m+n)u + t = 0$$

hervorgehen. Diese Gleichung, wenn anstelle von u und t die angenommenen Werte eingesetzt werden, wird die gesuchte modulare Gleichung sein.

§29 In gleicher Weise, wenn

$$z = \int (P+Q+R)dx$$

und P eine Funktion $n-1$, Q eine Funktion von $m-1$ und R eine Funktion von $k-1$ von a und x war, setze man

$$u = \frac{adz - (P+Q+R)(adx - xda)}{da}$$

und

$$t = \frac{adu - (nP + mQ + kR)(adx - xda)}{da}$$

und

$$s = \frac{adt - (n^2P + m^2Q + k^2R)(adx - xda)}{da}.$$

Danach wird die modulare Gleichung diese sein:

$$kmnz - (km + kn + mn)u + (k+m+n)t - s = 0.$$

§30 Es sei weiter

$$z = \int (P+Q)^k dx,$$

wo P eine Funktion von n Dimensionen, Q hingegen eine Funktion von m Dimension von a und x. Wenn also

$$dP = Adx + Bda \quad \text{und} \quad dQ = Cdx + Dda$$

ist, wird

$$nP = Ax + Ba \quad \text{und} \quad mQ = Cx + Da$$

sein. Aber das Differential von $(P+Q)^k$ für konstant gehaltenes x geteilt durch da ist $k(B+D)(P+Q)^{k-1}$. Deswegen wird

$$dz = (P+Q)^k dx + \frac{kda}{a}\int (P+Q)^{k-1}(Ba+Da)dx$$

sein. Weil aber

$$Ba = nP - Ax \quad \text{und} \quad Da = mQ - Cx$$
$$\text{und} \quad Adx = dP \quad \text{und} \quad Cdx = dQ$$

ist, wird wegen des in dieser Integration konstanten a

$$dz = (P+Q)^k dx + \frac{kda}{a}\int (P+Q)^{k-1}(nPdx + mQdx - xdP - xdQ)$$

oder

$$dz = \frac{(P+Q)^k(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a}\int (P+Q)^{k-1}((nk+1)Pdx + (mk+1)Qdx)$$

sein. Man setze

$$\frac{adz - (P+Q)^k(adx - xda) - zda}{kda} = u,$$

es wird

$$u = \int (nPdx + mQdx)(P+Q)^{k-1}$$

sein. Wenn also das Integral $\int (nPdx + mQdx)(P+Q)^{k-1}$ vom Integral $\int (P+Q)^k dx$ abhängt, wird man eine modulare Differentialgleichung ersten Grades haben; wenn nicht, ist die Differentiation fortzusetzen. Es wird aber

$$du = (nPdx + mQdx)(P+Q)^{k-1} + \frac{uda}{a} - \frac{da}{a}(nP + mQ)(P+Q)^{k-1}x$$

$$+\frac{da}{a}\int (kn^2P^2dx + (2kmn + n^2 - 2mn + m^2)PQdx + km^2Q^2dx)(P+Q)^{k-2}.$$

Und nach Setzen von

$$t = \frac{adu - uda - (nP + mQ)(P + Q)^{k-1}(adx - xa)}{da}$$

wird

$$t = \int (kn^2P^2dx + (2kmn + n^2 - 2mn + m^2)PQdx + km^2Q^2dx)(P + Q)^{k-2}$$

sein.

§31 Weil man also drei Integrale hat, ist zu sehen, ob sie voneinander abhängen; wenn dies nämlich der Fall war, wird man eine algebraische Gleichung zwischen t, u und z haben, welche, nachdem anstelle von t und u die angenommenen Werte eingesetzt worden sind, eine modulare Gleichung als Differentialgleichung zweiten Grades geben. Damit aber in speziellen Fällen leichter erkannt werden kann, ob sie voneinander abhängen, ist es ratsam sie auf andere Formen zurückzuführen. Weil also $z = \int (P + Q)^k dx$ ist, wird

$$u = mz + (n - m) \int (P + Q)^{k-1} Pdx$$

und

$$t = (2km + n - m)u - (km^2 - m^2 + mn)z + (n - m)^2(k - 1) \int (P + Q)^{k-2}P^2dx$$

sein. Es ist deshalb herauszufinden, ob

$$\int (P + Q)^{k-2}P^2dx$$

auf diese $\int (P + Q)^{k-1}Pdx$ und $(P + Q)^k dx$ zurückgeführt werden kann oder ob

$$\int (P + Q)^{k-2}P^2dx = \alpha \int (P + Q)^{k-1}Pdx + \beta \int (P + Q)^k dx + V,$$

während V irgendeine durch a und x gegebene algebraische Größe bezeichnet, und α und β aus Konstanten und a zusammengesetzte Koeffizienten sind.

§32 Es werde also $V = T(P+Q)^{k-1}$, das Differential von dieser für konstant gehaltenes a sei

$$dT(P+Q)^{k-1} + (k-1)(TdP + TdQ)(P+Q)^{k-2}.$$

Es wird also die folgende Gleichung hervorgehen

$$P^2dx = \alpha P^2dx + \alpha PQdx + \beta P^2dx + 2\beta PQdx + \beta Q^2dx + PdT + QdT$$
$$+(k-1)TdP + (k-1)TdQ,$$

welche durch dx geteilt werden kann. Aber T muss so angenommen werden, dass die entsprechenden Terme sich gegenseitig aufheben, nachdem dafür geeignete Werte für α und β angenommen worden sind.

§33 Aber wenn z durch Pdx nicht absolut bestimmt wird, aber die Größe $\int Qdz$, wobei Q irgendwie durch a und z gegeben ist, und P durch a und x, wird man diese Gleichung $Qdz = Pdx$ haben, in welcher die Unbestimmten x und z voneinander separiert sind. Die modulare Gleichung hingegen wird auf diese Weise gefunden werden. Weil $\int Qdz = \int Pdx$ ist, differenziere man beide Seiten nach der Variable a, wobei

$$dP = Adx + Bda \quad \text{und} \quad dQ = Cdz + Dda.$$

Es wird also

$$Qdz + da\int Ddz = Pdx + da\int Bdx$$

oder

$$Qdz = Pdx + da(\int Bdx - \int Ddz)$$

sein. Diese Gleichung, wenn $\int Bdx$ und $\int Ddz$ eliminiert werden können, wird die gesuchte modulare Gleichung geben.

§34 Es sei P eine Funktion von $m-1$ Dimensionen von a und x, und Q eine Funktion $n-1$ von Dimensionen von a und z. Nach Festsetzen davon wird

$$\text{Diff.} \int Pdx = \frac{mda\int Pdx + P(adx - xda)}{a},$$

$$\text{und Diff.} \int Qdz = \frac{nda \int Qdz + Q(adz - zda)}{a}$$

sein. Daraus findet man diese Gleichung

$$(m-n) \int Pdx = \frac{Q(adz - zda)}{da} - \frac{P(adx - xda)}{da}$$

wegen

$$\int Pdx = \int Qdz.$$

Wenn also $m = n$ war, wird

$$Qadz - Qzda = Padx - Pxda$$

sein, welche die modulare Gleichung ist oder

$$\frac{da}{a} = \frac{Qdz - Pdx}{Qz - Px}.$$

§35 Wenn aber m und n nicht gleich sind, wird die modulare Gleichung eine Differentialgleichung zweiten Grades sein. Denn weil

$$(m-n) \int Pdx = \frac{Q(adz - zda) - P(adx - xda)}{da}$$

ist, wird

$$\text{Diff.} \frac{Q(adz - zda) - P(adx - xda)}{da} = \frac{m(m-n)da \int Pdx}{a} + \frac{(m-n)P(adx - xda)}{a}$$
$$= \frac{mQ(adz - zda) - nP(adx - xda)}{a}$$

sein. Diese Gleichung ist die gesuchte modulare Gleichung.

§36 Wenn in der vorgelegten Gleichung $dz + Pdx = 0$ die Unbestimmten nicht voneinander getrennt sind, sodass P eine x und z und a involvierende Funktion ist, wird sie mit einer gewissen Größe R multipliziert werden müssen, damit die Formel $Rdz + PRdx$ wie das Differential eines gewissen Integrals S betrachtet werden kann. Deshalb wird $dS = Rdz + PRdx = 0$ sein und daher $S =$Konst. Aber um die Größe R zu finden, sei

$$dP = Adx + Bdz \quad \text{und} \quad dR = Ddx + Edz,$$

wo wir a durchgehend als Konstante behandeln. Nach Festlegen all dessen wird

$$d \cdot PR = (DP + AR)dx + (EP + BR)dz$$

sein, welche deshalb

$$D = EP + BR$$

sein muss. Aber wegen

$$D = \frac{dR - Edz}{dx}$$

wird

$$Edz + EPdx + BRdx = dR$$

werden. Weil aber $dz + Pdx = 0$ ist, wird man

$$dR = BRdx \quad \text{und} \quad \ln R = \int Bdx$$

haben. Es ist aber B aus dem gegebenen P bekannt, und weil B und z und x beinhaltet, muss Bdx mithilfe der Gleichung $dz + Pdx = 0$ integriert werden, wenn es freilich möglich ist. Es sei deshalb $\int Bdx = K$, und es wird $R = e^K$ sein, wobei $\ln e = 1$ gesetzt worden ist.

§37 Weil also

$$dS = e^K dz + e^K Pdx = 0$$

ist, sei, um die modulare Gleichung zu finden,

$$dK = Fdx + Gdz + Hda,$$

und es wird

$$de^K = e^K(Fdx + Gdz + Hda)$$

sein. Man nehme weiter das Integral von $e^K Hdz$ für allein variabel festgelegtes z, x und a seien hingegen konstant, wonach die modulare Gleichung

$$e^K dz + e^K Pdx + da \int e^K Hdz = 0$$

sein wird oder nach Teilung durch e^K

$$dz + Pdx + e^{-K} da \int e^K Hdz = 0.$$

Eine andere modulare Gleichung findet man nach Setzen von

$$dP = Adx + Bdz + Cda,$$

denn das Differential von $e^K P$ wird für konstant gehaltenes x und z dieses sein: $e^K (Cda + PHda)$. Man integriere $e^k dx(C + PH)$ für allein variabel festgelegtes x, wonach die modulare Gleichung

$$dz + Pdx + e^{-K} da \int e^K dx(C + PH) = 0$$

sein wird. Aber modulare Gleichung von dieser Art, wenn R nicht ohne die vorgelegte Gleichung $dz + Pdx = 0$ bestimmt werden kann, sind nahezu vollkommen nutzlos.

§38 Wir wollen also spezielle Fälle betrachten, und in der Gleichung $dz + Pdx = 0$ sei P eine Funktion von keiner Dimension von x und z, wobei Konstanten und der Modulus a nicht mit eingerechnet worden sind. Aber die Formel $dz + Pdx$ wird immer integrierbar gemacht, wenn sie durch $z + Px$ geteilt wird, weswegen

$$S = \int \frac{dz + Pdx}{z + Px} = \text{Konst.}$$

sein wird. Es wird aber

$$\int \frac{dz + Pdx}{z + Px} = \log(z + Px) - \int \frac{xdP}{z + Px}.$$

Weiter wird nach Setzen von $z = tx$ P eine Funktion nur von t werden, welche T sei. Daher wird

$$S = \ln(z + Px) - \int \frac{dT}{t + T},$$

welche durch Quadraturen dargeboten werden kann.

§39 Um also die modulare Gleichung zu finden, ist nichts anderes zu tun, als dass $\int \frac{dz+Pdx}{z+Px}$ für ebenfalls variabel festgelegten Modulus a differenziert wird. Man setze also

$$dP = Adx + Bdz + Cda,$$

wo $Ax + Bz = 0$ sein wird. Man differenziere nun den Koeffizienten von dx, also $\frac{P}{z+Px}$, für allein variables a, sein Differential wird $\frac{Czda}{(z+Px)^2}$ sein. Weiter integriere man $\frac{Czdx}{(z+Px)^2}$ nach der alleinigen Variable x, wonach die gesuchte modulare Gleichung

$$dz + Pdx + (z + Px)da \int \frac{Czdx}{(z + Px)^2} = 0$$

sein wird. In gleicher Weise geht aus dem Koeffizienten von dz, welcher $\frac{1}{z+Px}$ ist, diese modulare Gleichung hervor

$$dz + Pdx - (z + Ox)da \int \frac{Cxdz}{(Z + Px)^2} = 0,$$

in welcher Integration nur z für die Variable gehalten wird. Ober auch diese

$$dz + Pdx = (z + Px)da \int \frac{Ddt}{(t + T)^2},$$

in welcher D und T allein durch t und a gegeben sind.

§40 Ich kann es hier nicht unterlassen, dass ich die allgemeine Lösung der homogenen Gleichungen, wie sie vom hoch geehrten Johann Bernoulli genannt werden, welche alle in dieser Gleichung $dz + Pdx = 0$ enthalten sind, hier beifüge. Denn man findet aus § 38

$$\ln(z + Px) = \int \frac{dT}{t + T} = \log(t + T) - \int \frac{dt}{t + T},$$

wo $t = \frac{z}{x}$ und $T = P$ ist. Es wird also

$$\ln x + \int \frac{dt}{t + T} = 0$$

oder nach Hinzufügen der Konstante

$$\ln \frac{c}{x} = \int \frac{dt}{t + T}.$$

Wie wenn die Gleichung

$$nxdz + dx\sqrt{x^2 + z^2} = 0$$

vorgelegt ist, wird $P = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{nx}$ und nach Setzen von $z = tx$ wird $T = \frac{\sqrt{1+tt}}{n}$ und daher

$$\ln\frac{c}{x} = \int \frac{ndt}{nt + \sqrt{1+tt}}$$

sein; es werde

$$\sqrt{1+tt} = t + s,$$

es wird

$$t = \frac{1-ss}{2s} \quad \text{und} \quad dt = \frac{-ds(1+ss)}{2ss}$$

sein. Daher wird

$$\ln\frac{c}{x} = \int \frac{-nds(1+ss)}{(n+1)s - (n-1)s^3} = \frac{-n}{n+1}\ln s + \frac{n^2}{n^2-1}\ln[(n-1)s^2 - n - 1] \quad (1)$$

sein.

§41 Damit dennoch der Nutzen der Rechnung aus § 36 in einem speziellen Fall klar wird, sei die vorgelegte Gleichung

$$dz + pzdx - qdx = 0,$$

in welcher p und q in beliebiger Weise von a und x gegeben sind. Weil diese Gleichung mit der allgemeinen $dz + Pdx = 0$ zusammengebracht $P = pz - q$ gibt, woher $B = p$ und $\ln R = \int pdx$ oder $R = e^{\int pdx}$ werden wird. Weil also $\int pdx$ durch Quadraturen angegeben werden kann, ist der Wert von R bekannt, und daher wird die vorgelegte Gleichung mit $e^{\int pdx}$ multipliziert integrierbar; also wird

$$e^{\int pdx}dz + e^{\int pdx}pzdx - e^{\int pdx}qdx = 0$$

sein und deren Integral

$$e^{\int pdx} z = \int e^{\int pdx} q dx \quad \text{oder} \quad z = e^{-\int pdx} \int e^{\int pdx} q dx.$$

Deshalb muss $e^{-\int pdx} \int e^{\int pdx} q dx$ nach den Variablen a und x differenziert werden, und das Differential dz gleich gesetzt werden, wonach man die modulare Gleichung haben wird. Also wird nach

$$dp = f dx + g da \quad \text{und} \quad dq = h dx + i da$$

diese modulare Gleichung hervorgehen

$$dz = -e^{-\int pdx}(pdx + da \int gdx) \int e^{\int pdx} q dx + q dx + e^{-\int pdx} da \int e^{\int pdx}$$
$$(idx + qdx \int gdx),$$

oder, wenn man der Kürze wegen $\int e^{\int pdx} q dx = T$ setzt, wird

$$dz = -e^{-\int pdx} T p dx + q dx + e^{-\int pdx} da \int e^{\int pdx} i dx - e^{-\int pdx} da \int T g dx$$

sein. Aus dieser Operation kann man einsehen, dass, um die modulare Gleichung zu finden, es insbesondere zu erwirken ist, dass in der vorgelegten Gleichung die Unbestimmten voneinander getrennt sind.